УДК 512.53

В. Д. Дереч, к. ф-м. н., доц.

ПРО ПЕРЕСТАВНІ ІНВЕРСНІ ПІВГРУПИ СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Доведено, що переставна інверсна півгрупа без нуля, півґратка ідемпотентів якої має скінченну довжину, є групою.

Вступ

Півгрупа називається переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень. В статті [1] показано, що будь-які дві конгруенції, які належать відношенню H (це відношення Гріна) є переставними. Обернена теорема не виконується. В якості прикладу можна взяти скінченну інверсну симетричну півгрупу. В статті [2] узагальнено основний результат роботи [1]. В статті [3] для випадку інверсної півгрупи з нулем, півґратка ідемпотентів якої має скінченну довжину, одержано обернену теорему до теореми з пункту 4 [2]. В даній роботі ми розглядаємо випадок, коли вищезгадана інверсна півгрупа не містить нуля.

Основні означення і термінологія

Півґратка L називається півґраткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з L не перевищує числа n.

Нехай S — довільна півгрупа, а N_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $rank : S \to N_0$ називають ранговою на півгрупі S, якщо для будь-яких a і b виконується нерівність $rank(a \cdot b) \le \min\{rank(a), rank(b)\}$. Число $rank(x)$ називають рангом елемента x.

Якщо L — півґратка скінченної довжини, то через $rank(x)$ позначимо висоту елемента x. Легко перевірити, що таким чином визначена функція є ранговою на півґратці L.

Нехай S — інверсна півгрупа, півґратка ідемпотентів якої має скінченну довжину. На півгрупі S визначимо функцію $rank : S \to N_0$ таким чином: будемо вважати (за означенням) $rank(a) = rank(a \cdot a^{-1})$ для довільного елемента a півгрупи S. Щойно визначена функція є ранговою на інверсній півгрупі S (в [3], теорема 1).

Всі інші необхідні поняття з теорії півгруп і теорії інверсних півгруп можна знайти відповідно в монографіях [4] і [5].

Формулювання результатів і постановка питання

В цьому пункті процитуємо необхідні для нас (вже опубліковані) результати і сформулюємо постановку питання.

Результат 1. ([1], теорема 2). Якщо конгруенції ρ і σ півгрупи S містяться в H (де H — відношення Гріна), то $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

Результат 2. ([2], теорема п. 4). Нехай S — півгрупа, I_1 і I_2 — її ідеали, причому $I_1 \subseteq I_2$. Нехай Θ_1 і Θ_2 — конгруенції на півгрупі S такі, що $\Theta_1 = I_1 \times I_1 \cup \Omega$ і $\Theta_2 = I_2 \times I_2 \cup \Sigma$, де $\Omega \subseteq H$ і $\Sigma \subseteq H$, а H — відношення Гріна.

Тоді $\Theta_1 \circ \Theta_2 = \Theta_2 \circ \Theta_1$.

У вступній частині ми вже зазначали, що обернена теорема для результату 1 не виконується. Аналогічна ситуація має місце і для результату 2. Звідси цілком логічно випливає проблема пошуку таких класів півгруп, для яких достатня умова комутативності (відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень) будь-яких двох конгруенцій стає і необхідною умовою. Одним з таких класів є клас півгруп, що розглядається в статті [3].

Результат 3. ([3], теорема 4). Нехай S — інверсна півгрупа з нулем, півґратка ідемпотентів якої має скінченну довжину.

Будь-які дві конгруенції на півгрупі S переставні тоді і тільки тоді, коли її ідеали лінійно впорядковані і кожна конгруенція Θ має форму $\Theta = I \times I \cup \Omega$, де I — ідеал півгрупи S і $\Omega \subseteq H$, а H — відношення Гріна.

В даній статті ми розглянемо випадок, коли вищезгадана (див. форму-лювання результату 3) інверсна півгрупа не містить нуля. Для доведення основної теореми (див. теорему 2) нам знадобляться ще такі результати:

Результат 4. ([6], лема 8). Нехай I — ідеал півгрупи S. Якщо $f : I \to G$ — гомоморфізм на нетривіальну групу G, то існує гомоморфізм $g : S \to G$ такий, що g є продовженням f.

Результат 5. ([7], теорема 3). Якщо півгрупа S містить власний ідеал і має власну групову конгруенцію, то вона не є переставною.

Ідеал елементів нульового рангу

Нехай S — інверсна півгрупа, півґратка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Легко перевірити, що $I_0 = \{x \in S | rank(x) = 0\}$ є ідеалом півгрупи S.

Теорема 1. *Ідеал I_0 є підгрупою півгрупи S.*

Доведення. Насамперед зазначимо, що множина I_0 непорожня. Дійсно, оскільки за умовою півґратка ідемпотентів півгрупи S має скінченну довжину, то вона (півґратка ідемпотентів) має найменший елемент, ранг якого очевидно дорівнює нулю.

Переконаємось тепер, що I_0 підпівгрупа. Отже, нехай $x \in I_0$ і $y \in I_0$. $rank(x \cdot y) \le rank(x) = 0$. Таким чином, $rank(x \cdot y) = 0$. Тобто $x \cdot y \in I_0$.

Доведемо тепер, що I_0 містить ідемпотент. Нехай $x \in I_0$, тоді $rank(x) = 0$, але $rank(x) = rank(x^{-1}) = 0$ тобто $x^{-1} \in I_0$. Оскільки $rank(x \cdot x^{-1}) \le rank(x) = 0$, то $rank(x \cdot x^{-1}) = 0$ тобто $x \cdot x^{-1} \in I_0$. Покажемо, що в I_0 цей ідемпотент єдиний. Нехай ω і f ідемпотенти, що належать I_0. Якщо припустити, що $\omega < f$, то $rank(\omega) < rank(f)$. Суперечність. Аналогічно не може виконуватись і нерівність $f < \omega$. Якщо ж ідемпотенти ω і f утворюють антиланцюжок, то $\omega \cdot f < \omega$. Звідси $rank(\omega \cdot f) < rank(\omega)$. Суперечність. Отже, ідеал I_0 містить єдиний ідемпотент. Позначимо його через e. Доведемо, що e — одиниця півгрупи I_0. Нехай $x \in I_0$, тоді $x^{-1} \cdot x = e$ і $x \cdot x^{-1} = e$. Отже, $x \cdot e = x \cdot x^{-1} \cdot x = x$ і $e \cdot x = x \cdot x^{-1} \cdot x = x$. Таким чином, ідеал I_0 є групою. Очевидно, що I_0 — найменший (за включенням) ідеал півгрупи S.

Основна теорема

В цьому пункті доведемо основну теорему статті.

Теорема 2. *Нехай S — інверсна півгрупа, півґратка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Якщо S є переставною півгрупою, яка не містить нуля, то S — група.*

Доведення. Як і раніше позначимо через I_0 множину всіх елементів, ранг яких дорівнює нулю. За теоремою 1 (див. попередній пункт) ідеал I_0 є групою. Оскільки за умовою півгрупа S не містить нуля, то $|I_0| > 1$ тобто група I_0 не є тривіальною. Доведемо тепер, що $S = I_0$. Припустимо протилежне тобто $S - I_0 \ne \varnothing$. Очевидно, що тотожне перетворення групи I_0 є автоморфізмом. Крім того I_0 — ідеал півгрупи S. Тому за лемою Тамури (див. результат 4) існує гомоморфізм півгрупи S на нетривіальну групу I_0.

Далі, скориставшись теоремою Гамільтона (див. результат 5), робимо висновок, що півгрупа S не є переставною. Суперечність. Отже, $S = I_0$. Таким чином, півгрупа S є групою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Munn W. D. A certain sublattice of the lattice of congruences on a regular semigroup // Proc. Camb. Philos. Soc. — 1964 — V. 60. — P. 385—391.
2. Дереч В. Д. Про переставні конгруенції на антигрупах скінченного рангу // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56. — № 3. — С. 346—351.
3. Дереч В. Д. Конгруенції переставної інверсної півгрупи скінчен-ного рангу // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. — 57. — № 3. — С. 469—473.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. — М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 286 с.
5. Petrich M. Inverse semigroups. — New York etc.: John Willey and Sons, 1984. — 674 p.
6. Tamura T. Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain // Bull. Soc. Math. France — 1969 — V. 97. — P. 369—380.
7. Hamilton H. Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum — 1975 — V. 10. — P. 55—66.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Надійшла до редакції 31.03.05
Рекомендована до друку 26.04.05

Дереч Володимир Дмитрович – доцент кафедри вищої математики.
Вінницький національний технічний університет